

文章编号:1008-1542(2012)06-0559-05

## 部分预应力混凝土受弯构件开裂截面应力计算

魏 炜

(长安大学公路学院, 陕西西安 710064)

**摘 要:**在分析预应力混凝土受弯构件截面应变分布规律的基础上,给出了预应力钢筋与相邻混凝土的应变差(若钢筋与混凝土之间黏结可靠,这一应变差被始终保持不变),据此建立了预应力混凝土受弯构件开裂截面的应力计算公式新的推演过程。其过程具有概念清晰、易于理解的特点,所提出的方法对加筋混凝土偏心受压构件具有普遍适应性。

**关键词:**预应力混凝土;开裂截面;B类构件;部分预应力

**中图分类号:**TU378 **文献标志码:**A

## Stress calculation of cracking section of partially prestressed concrete bending member

WEI Wei

(School of Highway, Chang'an University, Xi'an Shaanxi 710064, China)

**Abstract:** On the basis of analyzing the stress distribution law of section of P. C. member in bending, the stress difference between prestressed reinforcement and adjacent concrete was given (this strain difference is always kept constant if the bond strength between the steel bar and the concrete is reliable), the new method to compute the stress of the cracking section was established. This method has the characteristics of clear concept, easy understanding and universality for eccentric compression member of concrete reinforced with bars.

**Key words:** prestressed concrete; cracking section; B-kind member; partially prestressed

允许开裂的部分预应力混凝土B类受弯构件,在使用阶段的受力情况,与全预应力混凝土及部分预应力混凝土A类构件的计算不同点在于截面可能已开裂。开裂截面的中性轴位置和几何特性,不仅取决于混凝土截面尺寸,而且还取决于横向弯矩的大小和预加力的大小及其作用位置、预应力钢筋和普通钢筋数量的多少,这使计算比较复杂。

部分预应力混凝土受弯构件截面开裂后的应力状态,与钢筋混凝土大偏心受压构件很相似。但应该注意到,当外力为零时,钢筋混凝土大偏心受压构件截面上各应力均等于零(称为“零应力”状态),且仅有单一的偏心压力作用。而作用在预应力混凝土受弯构件上的荷载,是在2个阶段作用上去的,预加力阶段预应力钢筋的张拉回缩力 $N_p$ 及其对混凝土产生的预应力(实际上是2种材料的内部相互作用,并不能简单地视为外荷载);使用阶段结构恒载和活载的效应——使用荷载弯矩 $M$ ;预应力钢筋的回缩力及其对混凝土产生的预应力与使用荷载产生的弯矩 $M$ 不具有同时性,更不是比例加载,所以不能简单地将这些作用力合成为一个偏心压力,像钢筋混凝土偏压受压构件一样计算截面上的应力。为了能够借用钢筋混凝土大偏心受压构件的计算方法,新旧《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》等<sup>[1-4]</sup>实际上均引入了一个“虚拟荷

收稿日期:2012-06-20;修回日期:2012-11-10;责任编辑:冯 民

作者简介:魏 炜(1963-),男,陕西长武人,副教授,主要从事桥梁结构分析方面的研究。

载”，“虚拟荷载”施加时在截面上的应力效应采用未开裂截面的几何特性计算，卸掉时在截面上的应力效应却采用开裂截面特性计算，该方法较难理解；文献[3]也是采用“虚拟荷载”的方法，但为了避免解一元三次方程，采用了反复试算的方式求近似解；文献[5]—文献[10]也均采用“虚拟荷载”的方法，在理论上仍在重复前人的成果。

### 1 开裂截面应力计算

#### 1.1 基本假定

预应力混凝土受弯构件开裂截面的应力计算，是属于正常使用极限状态的设计计算，仍按弹性理论进行，其基本假定如下：

- 1) 受弯构件截面开裂后的变形仍符合平截面假定；钢筋和受压混凝土仍处于弹性阶段；
- 2) 不计截面受拉区混凝土的拉应力；
- 3) 不考虑裂缝与裂缝之间未开裂截面对计算的影响。

#### 1.2 预加力效应

在配有非预应力钢筋的预应力混凝土构件中，由于混凝土的收缩和徐变，使非预应力钢筋产生与预加力相反的内力。为简化计算，非预应力钢筋的应力均近似取为混凝土收缩和徐变引起的预应力损失值。在截面全部预应力钢筋和普通钢筋的合力作用下(见图1)，预压区、预拉区预应力钢筋合力  $N_p$  中心处混凝土的压应变分别为

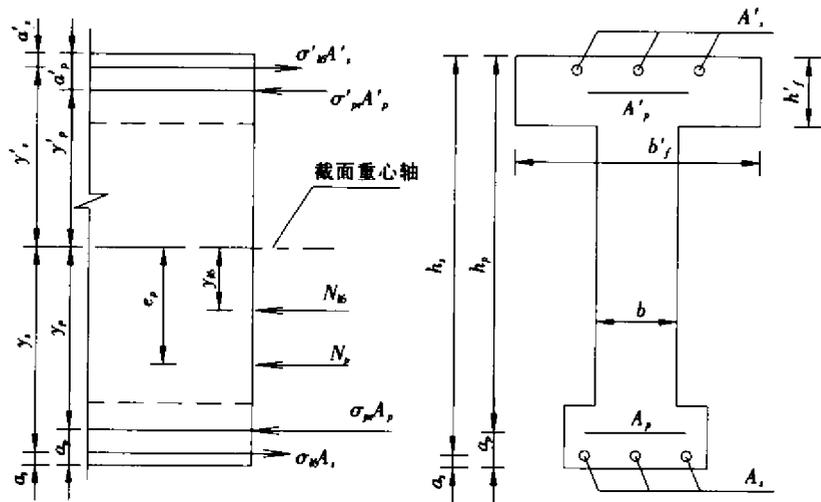


图1 预加力效应

Fig.1 Preloaded effect

$$\epsilon'_{cp} = \frac{N_p}{AE_c} \left(1 - \frac{e_p y_p}{r^2}\right),$$

$$\epsilon_{cp} = \frac{N_p}{AE_c} \left(1 + \frac{e_p y_p}{r^2}\right).$$

式中： $A$ 为截面面积； $r$ 为截面回转半径； $E_c$ 为混凝土弹性模量； $y_p$ 为预拉区预应力钢筋合力中心至截面重心的距离； $y'_p$ 为预压区预应力钢筋合力中心至截面重心的距离； $N_p = \sigma_{p0} A_p + \sigma'_{p0} A'_p - \sigma_{s6} A_s - \sigma'_{s6} A'_s$ ， $\sigma_{p0} = \sigma_{con} - \sigma_l + \sigma_{l4}$ （对先张构件）， $\sigma_{p0} = \sigma_{pe} = \sigma_{con} - \sigma_l$ （对后张构件）， $\sigma_{pe}$ 为预拉区预应力钢筋的有效预应力， $A_p$ 为预拉区预应力钢筋的总面积， $\sigma'_{p0} = \sigma'_{con} - \sigma'_l + \sigma'_{l4}$ （对先张构件）， $\sigma'_{p0} = \sigma'_{pe} = \sigma'_{con} - \sigma'_l$ （对后张构件）， $\sigma_{pe}$ 为预压区预应力钢筋的有效预应力， $A'_p$ 为预压区预应力钢筋的总面积； $e_p$ 为合力  $N_p$  至截面重心的距离，其大小为

$$e_p = \frac{\sigma_{p0} A_p y_p - \sigma'_{p0} A'_p y'_p - \sigma_{s6} A_s y_s + \sigma'_{s6} A'_s y'_s}{N_p}.$$

此时，预拉区和预压区预应力钢筋中的拉应变分别为

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_{pe}}{E_p}, \quad \epsilon'_p = \frac{\sigma'_{pe}}{E_p}.$$

式中： $E_p$ 为预应力钢筋弹性模量。

则预拉区预应力钢筋与其重心处混凝土的应变差为

$$\Delta\epsilon_{p0} = \epsilon_p - (-\epsilon'_{cp}) = \frac{1}{E_p A_p} \left[ \sigma_{pe} A_p + \alpha_{cp} \frac{N_p}{A} \left(1 + \frac{e_p y_p}{r^2}\right) A_p \right] = \frac{N_{p0}}{E_p A_p}. \tag{1}$$

式中： $N_{p0} = \sigma_{pe} A_p + \alpha_{cp} \frac{N_p}{A} \left(1 + \frac{e_p y_p}{r^2}\right) A_p$ ， $\alpha_{cp} = \frac{E_p}{E_c}$ 。

则预压区预应力钢筋与其重心处混凝土的应变差为

$$\Delta\epsilon'_{p0} = \epsilon'_p - (-\epsilon'_{cp}) = \frac{1}{E_p A_p} \left[ \sigma'_{pc} A'_p + \alpha_{cp} \frac{N_p}{A} \left( 1 - \frac{e_p y'_p}{r^2} \right) A'_p \right] = \frac{N'_{p0}}{E_p A_p} \quad (1')$$

式中  $N'_{p0} = \sigma'_{pc} A'_p + \alpha_{cp} \frac{N_p}{A} \left( 1 - \frac{e_p y'_p}{r^2} \right) A'_p$ 。

在截面全部普通钢筋的合力  $N_{t6}$  作用下(见图 1), 预压区、预拉区普通钢筋合力中心处混凝土的拉应变分别为

$$\epsilon'_{cs} = \frac{N_{t6}}{AE_c} \left( 1 - \frac{y_{t6} y'_s}{r^2} \right), \quad \epsilon_{cs} = \frac{N_{t6}}{AE_c} \left( 1 + \frac{y_{t6} y_s}{r^2} \right)。$$

式中  $N_{t6} = \sigma_{t6} A_s + \sigma'_{t6} A'_s$ ;  $y_{t6}$  为合力  $N_{t6}$  至截面重心的距离, 其大小为

$$y_{t6} = \frac{\sigma_{t6} A_s y_s - \sigma'_{t6} A'_s y'_s}{N_{t6}}。$$

此时, 预拉区和预压区普通钢筋中的拉应变分别为

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_{t6}}{E_s}, \quad \epsilon'_s = \frac{\sigma'_{t6}}{E_s}。$$

式中  $E_s$  为普通钢筋弹性模量。

则预拉区普通钢筋与其重心处混凝土的应变差为

$$\Delta\epsilon_{s0} = \epsilon_{cs} - (-\epsilon_s) = \frac{1}{E_s A_s} \left[ \sigma_{t6} + \alpha_{cs} \frac{N_{t6}}{A} \left( 1 + \frac{y_{t6} y_s}{r^2} \right) \right] A_s = \frac{N_{s0}}{E_s A_s} \quad (2)$$

式中:  $\alpha_{cs} = \frac{E_s}{E_c}$ ;  $N_{s0} = \sigma_{t6} A_s + \alpha_{cs} \frac{N_{t6}}{A} \left( 1 + \frac{y_{t6} y_s}{r^2} \right) A_s$ 。

则预压区普通钢筋与其重心处混凝土的应变差为

$$\Delta\epsilon'_{s0} = \epsilon'_{cs} - (-\epsilon'_s) = \frac{1}{E_s A'_s} \left[ \sigma'_{t6} + \alpha_{cs} \frac{N_{t6}}{A} \left( 1 - \frac{y_{t6} y'_s}{r^2} \right) \right] A'_s = \frac{N'_{s0}}{E_s A'_s} \quad (2')$$

式中  $N'_{s0} = \left[ \sigma'_{t6} + \alpha_{cs} \frac{N_{t6}}{A} \left( 1 - \frac{y_{t6} y'_s}{r^2} \right) \right] A'_s$ 。

在以上计算中, 对先张法施工的预应力混凝土构件, 采用换算截面参数; 对后张法施工的预应力混凝土构件, 采用净截面参数。

### 1.3 开裂截面应力计算

图 2 所示为具有一般性的预应力混凝土受弯构件工字形截面开裂应力计算图式。

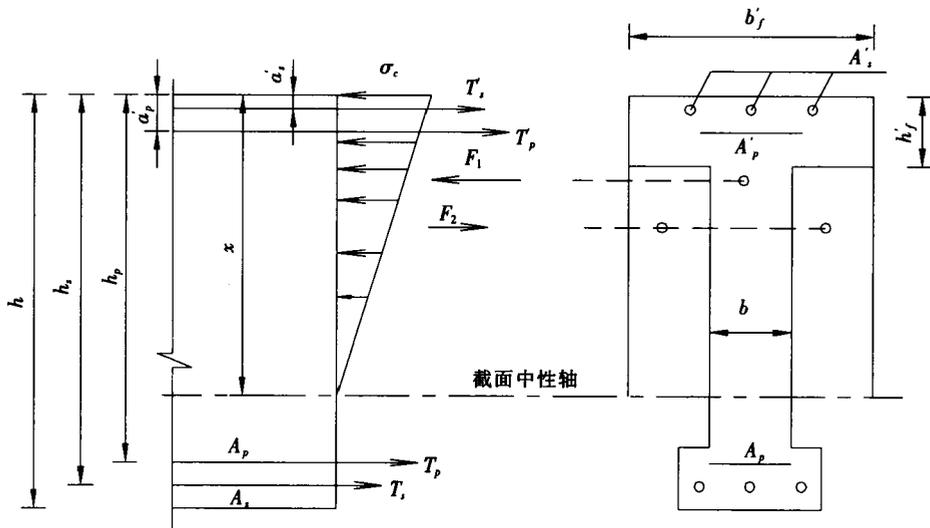


图 2 开裂截面应力计算图式

Fig. 2 Computation of stress of cracked section

受拉区混凝土因开裂退出了工作, 受压区混凝土应力、应变呈线性分布, 受压区高度为  $x$ ,  $\sigma_c$  为受压区边缘混凝土压应力。为计算简便, 先将受压区扩张成矩形 ( $b'_f \times x$ ), 其上的合力为  $F_1 = \frac{b'_f x \sigma_c}{2}$  (压力), 其作用点

距截面中性轴  $\frac{2x}{3}$ , 再扣除腹板两侧 2 个矩形的作用, 其上的合力为  $F_2 = (b'_f - b)(x - h'_f)^2 \cdot \frac{\sigma_c}{2x}$  (拉力), 其合力作用点距截面中性轴  $\frac{2(x - h'_f)}{3}$ 。

预拉区和预压区预应力钢筋重心处混凝土的应变分别为  $\frac{(h_p - x)\sigma_c}{xE_c}$  和  $-\frac{(x - a'_p)\sigma_c}{xE_c}$ , 预应力钢筋应变比其重心处混凝土的应变分别大  $\Delta\epsilon_{p0}$  和  $\Delta\epsilon'_{p0}$ , 故预应力钢筋的应变分别为  $\frac{h_p - x}{E_c x}\sigma_c + \Delta\epsilon_{p0}$  和  $-\frac{(x - a'_p)\sigma_c}{xE_c} + \Delta\epsilon'_{p0}$ , 将  $\Delta\epsilon_{p0}$  和  $\Delta\epsilon'_{p0}$  表达式代入, 并整式分别乘以  $E_p A_p, E_p A'_p$ , 即得预拉区和预压区预应力钢筋中的合力  $T_p$  和  $T'_p$  (拉力为正):

$$T_p = \alpha_{ep} \frac{h_p - x}{x} \sigma_c A_p + N_{p0}, \quad T'_p = -\alpha_{ep} \frac{x - a'_p}{x} \sigma_c A'_p + N'_{p0}.$$

预拉区和预压区普通钢筋重心处混凝土的应变分别为  $\frac{(h_s - x)\sigma_c}{xE_c}$  和  $-\frac{(x - a'_s)\sigma_c}{xE_c}$ , 普通钢筋应变比其重心处混凝土的应变分别小  $\Delta\epsilon_{s0}$  和  $\Delta\epsilon'_{s0}$ , 故普通钢筋的应变分别为  $\frac{h_s - x}{E_c x}\sigma_c - \Delta\epsilon_{s0}$  和  $-\frac{(x - a'_s)\sigma_c}{xE_c} - \Delta\epsilon'_{s0}$ 。将  $\Delta\epsilon_{s0}$  和  $\Delta\epsilon'_{s0}$  表达式代入, 并整式分别乘以  $E_s A_s$  和  $E_s A'_s$ , 得预拉区和预压区普通钢筋中的合力  $T_s$  和  $T'_s$  (拉力为正):

$$T_s = \alpha_{es} \frac{h_s - x}{x} \sigma_c A_s - N_{s0}, \quad T'_s = -\alpha_{es} \frac{x - a'_s}{x} \sigma_c A'_s - N'_{s0}.$$

水平方向(构件轴线方向)上力的平衡方程为

$$F_1 - F_2 - (T_s + T'_s + T_p + T'_p) = 0. \quad (3)$$

将具体表达式代入后, 可得

$$\left[ \frac{b'_f x^2}{2} - \frac{(b'_f - b)(x - h'_f)^2}{2} - \alpha_{es}(h_s - x)A_s - \alpha_{ep}(h_p - x)A_p + \alpha_{es}(x - a'_s)A'_s + \alpha_{ep}(x - a'_p)A'_p \right] \sigma_c = (N_{p0} + N'_{p0} - N_{s0} - N'_{s0})x.$$

进一步可导出

$$\sigma_c = \frac{(N_{p0} + N'_{p0} - N_{s0} - N'_{s0}) \cdot x}{\frac{1}{2}b'_f x^2 - \frac{1}{2}(b'_f - b)(x - h'_f)^2 - \alpha_{es}(h_s - x)A_s - \alpha_{ep}(h_p - x)A_p + \alpha_{es}(x - a'_s)A'_s + \alpha_{ep}(x - a'_p)A'_p}. \quad (3')$$

对中性轴取矩建立力矩平衡方程式  $\sum M_z = M$ :

$$F_1 \cdot \frac{2}{3}x - F_2 \cdot \frac{2}{3}(x - h'_f) + T_s(h_s - x) + T_p(h_p - x) - T'_s(x - a'_s) - T'_p(x - a'_p) = M. \quad (4)$$

将具体表达式代入, 可得

$$\sigma_c = \frac{[e_N + x]N_f x}{\frac{1}{3}b'_f x^3 - \frac{1}{3}(b'_f - b)(x - h'_f)^3 + \alpha_{es}A_s(h_s - x)^2 + \alpha_{ep}A_p(h_p - x)^2 + \alpha_{es}A'_s(x - a'_s)^2 + \alpha_{ep}A'_p(x - a'_p)^2}. \quad (4')$$

式中:  $e_N = \frac{M}{N_f} - e_f$ ,  $N_f = N_{p0} + N'_{p0} - N_{s0} - N'_{s0}$ ,  $e_f = \frac{N_{p0}h_p + N'_{p0}a'_p - N_{s0}h_s - N'_{s0}a'_s}{N_{p0} + N'_{p0} - N_{s0} - N'_{s0}}$ 。

由式(3')、式(4')相等可得

$$bx^3 + 3be_N x^2 + [3(b'_f - b)h'_f(h'_f + 2e_N) + 6\alpha_{es}A_s(h_s + e_N) + 6\alpha_{es}A'_s(a'_s + e_N) + 6\alpha_{ep}A_p(h_p + e_N) + 6\alpha_{ep}A'_p(a'_p + e_N)]x - [(b'_f - b)h_f^2(3e_N + 2h'_f) + 6\alpha_{es}A_s h_s(h_s + e_N) + 6\alpha_{ep}A_p h_p(h_p + e_N) + 6\alpha_{es}A'_s a'_s(a'_s + e_N) + 6\alpha_{ep}A'_p a'_p(a'_p + e_N)] = 0. \quad (5)$$

式(5)与文献[2]中所给出的结果相同, 但以上导出过程力学概念运用明确, 且易理解, 无需引入“虚拟荷载”。由式(5)求得  $x$  后, 再由式(3')或式(4')即可确定  $\sigma_c$  的大小, 普通钢筋中的应力由下式求得(拉应力为正):

$$\sigma_{sm} = \alpha_{es} \frac{h_s - x}{x} \sigma_c - \frac{N_{s0}}{A_s}, \quad \sigma'_{sm} = -\alpha_{es} \frac{x - a'_s}{x} \sigma_c - \frac{N'_{s0}}{A'_{s0}}.$$

预应力钢筋中的应力为

$$\sigma_{pm} = \alpha_{ep} \frac{h_p - x}{x} \sigma_c + \frac{N_{p0}}{A_p}, \quad \sigma'_{pm} = -\alpha_{ep} \frac{x - a'_p}{x} \sigma_c + \frac{N'_{p0}}{A_p}$$

## 2 结 语

预加力导致预应力钢筋与相邻混凝土产生应变差;若钢筋与混凝土之间黏结可靠,这一应变差就始终保持不变,采用这一基本方法或原理使预应力混凝土受弯构件开裂截面的应力计算公式的推演变得非常简单易行。其过程具有概念清晰、易于理解的特点;所提出的方法对加筋混凝土偏心受压构件具有普遍适用性。

### 参考文献:

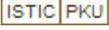
- [1] JTJ 023—85,公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范[S].
- [2] 叶见曙. 结构设计原理[M]. 第2版. 北京:人民交通出版社,2010.
- [3] MAST R F. Analysis of cracked prestressed concrete sections; A practical approach[J]. PCI Journal,1998,43(4):80-91.
- [4] JTGD 62—2004,公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范[S].
- [5] 王丽荣,杨 光. PPC结构正常使用阶段开裂截面的应力分析[J]. 哈尔滨工业大学学报(Journal of Harbin Institute of Technology),2001,33(1):79-81.
- [6] 张元海. 双作用部分预应力B类构件开裂截面应力计算[J]. 兰州铁道学院学报(Journal of Lanzhou Railway Institute),1995,14(1):40-45.
- [7] 赵静波,彭 凯,肖盛燮,等. 预应力砼梁开裂截面压应力计算的简化方法[J]. 重庆交通学院学报(Journal of Chongqing Jiaotong University),2004,23(6):7-9.
- [8] 徐 杰,傅传国,赵国栋,等. 预应力型钢混凝土梁开裂截面中和轴高度分析[J]. 山东建筑工程学院学报(Journal of Shandong University of Architecture and Engineering),2005,20(1):12-15.
- [9] 陈 曦,梁剑青. 改善钢管混凝土受力性能的构造措施[J]. 燕山大学学报(Journal of Yanshan University),2010,34(4):359-363.
- [10] 赵少伟,姜汝伟,刘建民,等. 配置HRB500级非预应力筋的无粘结部分预应力混凝土梁受弯性能试验研究[J]. 河北工业大学学报(Journal of Hebei University of Technology),2011,40(4):75-79.

(上接第539页)

### 参考文献:

- [1] BUSH R D, HEINZMAN S W. Ether hydroxypolycarboxylate detergency builders[P]. US:4654159,1987-03-12.
- [2] BROWN J M, MCDOWELL J F, et al. Methods of controlling scale formation in aqueous systems[P]. US:5062962,1991-11-02.
- [3] 熊荣春,魏 刚,周 娣. 绿色阻垢剂聚环氧琥珀酸的合成[J]. 工业水处理(Industrial Water Treatment),1999,19(3):11-13.
- [4] 冯素敏,师艳雪,秦宗仁,等. 绿色阻垢剂环氧琥珀酸聚合物的研究进展[J]. 河北工业科技(Hebei Journal of Industrial Science and Technology),2011,28(5):332-334.
- [5] 吕志芳,董 伟,夏明珠,等. 聚环氧琥珀酸的阻垢缓蚀性能研究[J]. 工业水处理(Industrial Water Treatment),2001,21(3):23-25.
- [6] 张冰如,李风亭. 聚环氧琥珀酸的多元阻垢性能[J]. 工业水处理(Industrial Water Treatment),2002,22(9):21-24.
- [7] 闫美芳. 聚天冬氨酸接枝共聚物的合成及阻垢性能研究[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology),2010,31(4):321-325.
- [8] 孙 敏,廖海星. ESA/AMPS共聚物的合成及阻垢性能研究[J]. 长江大学学报(自然科学版)(Journal of Yangtze University(Natural Science Edition)),2011,8(1):27-29.
- [9] 任红艳,王德武,刘 燕,等. 汽液固三相蒸发管内防除垢的数值模拟[J]. 河北工业大学学报(Journal of Hebei University of Technology),2012,41(2):46-51.
- [10] 程士范. 离子静电水处理技术[J]. 化肥工业(Journal of the Chemical Fertilizer Industry),1995,22(5):49-51.

# 部分预应力混凝土受弯构件开裂截面应力计算

作者: [魏炜, WEI Wei](#)  
作者单位: [长安大学公路学院, 陕西西安, 710064](#)  
刊名: [河北科技大学学报](#)   
英文刊名: [Journal of Hebei University of Science and Technology](#)  
年, 卷(期): 2012, 33(6)

## 参考文献(10条)

1. [公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范](#) 1985
2. [叶见曙 结构设计原理](#) 2010
3. [MAST R F Analysis of cracked prestressed concrete sections:A practical approach](#) 1998(04)
4. [公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范](#) 2004
5. [王丽荣;杨光 PPC结构正常使用阶段开裂截面的应力分析](#)[期刊论文]-[哈尔滨工业大学学报](#) 2001(01)
6. [张元海 双作用部分预应力B类构件开裂截面应力计算](#) 1995(01)
7. [赵静波;彭凯;肖盛燮 预应力砼梁开裂截面压应力计算的简化方法](#)[期刊论文]-[重庆交通学院学报](#) 2004(06)
8. [徐杰;傅传国;赵国栋 预应力型钢混凝土梁开裂截面中和轴高度分析](#)[期刊论文]-[山东建筑工程学院学报](#) 2005(01)
9. [陈曦;梁剑青 改善钢管混凝土受力性能的构造措施](#)[期刊论文]-[燕山大学学报](#) 2010(04)
10. [赵少伟;娄汝伟;刘建民 配置HRB500级非预应力筋的无粘结部分预应力混凝土梁受弯性能试验研究](#)[期刊论文]-[河北工业大学学报](#) 2011(04)

本文链接: [http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_hbkjdx201206018.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_hbkjdx201206018.aspx)